ÁLGEBRA DE BOOLE

Circuitos Digitales EC1723

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Electrónica y Circuitos
Prof. Juan. Claudio Regidor

George Boole

- Matemático británico (1815-1864).
- En su libro *Laws of Thought* dió forma matemática a la lógica de Aristóteles (1847).
- Su lógica simbólica le llevó a crear una familia de álgebras conocidas en conjunto como Álgebra de Boole o Álgebra Booleana.

Álgebra Booleana

- El Álgebra bi-evaluada que define una operación de "suma" y otra de "producto" es la base de los circuitos lógicos digitales.
  - En 1939, Claude Shannon aplicó el álgebra booleana al diseño de circuitos de conmutación.
- Los símbolos '0' y '1' se usan para representar los dos valores del álgebra, pero no tienen un significado numérico. Puede usarse otro par cualquiera, como 'F' y 'T', o dos valores diferentes de tensión o corriente.

Álgebra de Conmutación

- Álgebra definida para un conjunto de dos símbolos ({falso, verdadero}, {F, T}, {0, 1}, ...), con una operación de "suma" y una operación de "producto".
- Reglas de la suma (A+B):

$0+0=0$	$0+1=1$	$1+0=1$	$1+1=1$

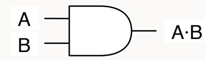
- Reglas del producto (A·B):

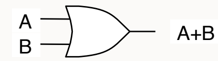
$0\cdot 0=0$	$0\cdot 1=0$	$1\cdot 0=0$	$1\cdot 1=1$

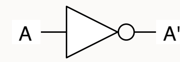
Álgebra de Conmutación

- La operación de suma booleana se conoce en lógica como ***o inclusivo***, abreviado ***o*** (se acostumbra usar el equivalente en inglés ***or***). Su símbolo es $\vee$.
- La operación de producto booleano se conoce en lógica como ***y*** (se acostumbra usar el equivalente en inglés ***and***). Su símbolo es $\wedge$.
- Existe también la operación de complemento o negación (*not*). Su símbolo es $\neg$.
- $A \cdot (B' + C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$

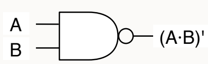
Compuertas Lógicas

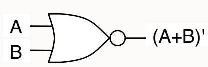
- La implementación electrónica de una función del álgebra de conmutación es llamada compuerta.
- Algunos símbolos circuitales:
  - Compuerta AND de dos entradas 

  - Compuerta OR de dos entradas 

  - Compuerta NOT o inversor 

Compuertas Lógicas

- Algunos símbolos circuitales (cont.):
  - Compuerta NAND de dos entradas (*and* negado) 

  - Compuerta NOR de dos entradas (*or* inclusivo negado) 

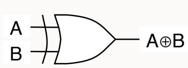
  - Compuerta XOR de dos entradas (*or* exclusivo) 

Tabla de verdad

- Es una representación de una función lógica que enumera el valor de la función para cada una de las combinaciones de valores de sus operandos.

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

and

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

or inclusivo

x	y	$(x \cdot y)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

and negado

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

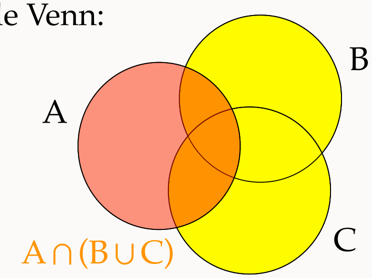
or exclusivo

Conjuntos

- La teoría de conjuntos es un ejemplo de álgebra booleana, si se hacen las identificaciones:
  - 0: conjunto vacío, Φ
  - 1: conjunto universal, **U**
  - Suma: unión de conjuntos, $\cup$
  - Producto: intersección de conjuntos, $\cap$
  - Complemento con respecto al conjunto universal **U**

Conjuntos

- La operación $A \cdot (B + C)$ puede representarse con un diagrama de Venn:



- $(B + C)$ es la unión de los conjuntos B y C, en amarillo
- La intersección de $B \cup C$ con A se ve en anaranjado.

Postulados del Álgebra de Conmutación

1. Existencia de sólo dos valores

$x = 0$ si $x \neq 1$ $\qquad$ $x = 1$ si $x \neq 0$

2. Complemento

$x = 0 \;\Rightarrow\; x' = 1$ $\qquad$ $x = 1 \;\Rightarrow\; x' = 0$

3. $0 \,.\, 0 = 0$ $\qquad$ $1 + 1 = 1$

4. $1 \,.\, 1 = 1$ $\qquad$ $0 + 0 = 0$

5. $0 \,.\, 1 = 1 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

Precedencia de Operadores

- Al igual que en el álgebra tradicional, se establece por convención una precedencia de operadores: el producto se realiza antes que la suma; el complemento tiene la mayor precedencia. Se puede alterar el orden de las operaciones por medio de paréntesis.
- Ejemplos:
  $x \cdot y + x \cdot z = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  $u \cdot (v + t) \neq u \cdot v + t$
  $x' \cdot u \cdot v' \cdot (y + z') = (x') \cdot u \cdot (v') \cdot (y + (z'))$

Principio de Dualidad

- Toda identidad booleana se mantiene si se hacen simultáneamente los intercambios

$$0 \leftrightarrow 1$$
$$+ \leftrightarrow \cdot$$

- Ejemplos:

$$\begin{array}{c} x+0=x \\ \updownarrow\;\updownarrow \\ x\cdot 1=x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x\cdot & (y+z) & = & x & \cdot & y+x & \cdot & z \\ \updownarrow & \updownarrow & & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ x+ & (y\cdot z) & = & (x+y) & \cdot & (x+z) & & \end{array}$$

Teoremas (i)

1. Elemento identidad

$x+0=x$ $\qquad$ $x\cdot 1=x$

Se puede demostrar por inducción perfecta o por conjuntos: $x\cup\Phi=x$; $\quad x\cap\mathbf{U}=x$

2. Elemento nulo

$x+1=1$ $\qquad$ $x\cdot 0=0$

En conjuntos: $x\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$; $\quad x\cap\Phi=\Phi$

Teoremas (ii)

3. Idempotencia

$x+x=x$ $\qquad$ $x\cdot x=x$

En conjuntos: $x\cup x=x$; $\quad x\cap x=x$

4. Involución o doble complemento

$(x')'=x$

Por inducción perfecta: $(0')'=(1)'=0$

$(1')'=(0)'=1$

Teoremas (iii)

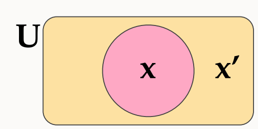
5. Complementos

$x+x'=1$ $\qquad$ $x\cdot x'=0$

Por inducción perfecta:

$0+0'=0+1=1$ $\qquad$ $0\cdot 0'=0\,.\,1=0$

$1+1'=1+0=1$ $\qquad$ $1\cdot 1'=1\,.\,0=0$



$x\cup x'=\mathbf{U}$; $\quad x\cap x'=\Phi$

Teoremas (iv)

6. Conmutatividad

$x + y = y + x$ $\qquad$ $x \cdot y = y \,.\, x$

7. Asociatividad

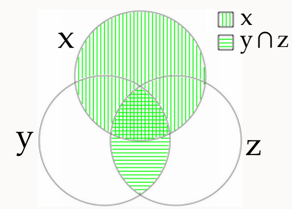
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $\qquad$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

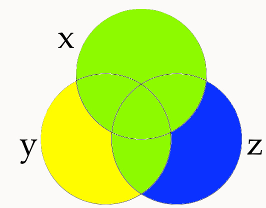
Teoremas (v)

8. Distributividad

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ $\qquad$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

$x \cup (y \cap z)$ $\qquad$ $(x \cup y) \cap (x \cup z)$





Teoremas (vi)

8. Distributividad (cont.)

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

$$\begin{aligned}
(x + y) \cdot (x + z) &= x \cdot x + x \cdot z + x \cdot y + y \cdot z \\
&= x + x \cdot z + x \cdot y + y \cdot z \quad \text{(idempotencia)} \\
&= x \cdot 1 + x \cdot z + x \cdot y + y \cdot z \quad \text{(identidad)} \\
&= x \cdot (1 + z + y) + y \cdot z \quad \text{(distributividad)} \\
&= x + y \cdot z \quad \text{(elemento nulo)}
\end{aligned}$$

Teoremas (vii)

9. Absorción

$x + x \cdot y = x$ $\qquad$ $x \cdot (x + y) = x$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y \\
&= x \cdot (1 + y) \\
&= x \cdot 1 = x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x \cdot (x + y) &= (x + 0) \cdot (x + y) \\
&= x + (0 \cdot y) \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}$$

Teoremas (viii)

10. Combinación

$x \cdot y + x \cdot y' = x \qquad (x + y) \cdot (x + y') = x$

Demostración:

$$x \cdot y + x \cdot y' = x \cdot (y + y') = x \cdot (1) = x$$

$$(x + y) \cdot (x + y') = x + (y \cdot y') = x + (0) = x$$

Teoremas (ix)

11. Consenso

$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$

$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$

Demostración:

$$\begin{aligned} x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z &= x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z \cdot (x + x') \\ &= x \cdot y + x' \cdot z + x \cdot y \cdot z + x' \cdot y \cdot z \\ &= x \cdot y + x' \cdot z \end{aligned}$$

Teoremas (x)

12.

$x + x' \cdot y = x + y \qquad x \cdot (x' + y) = x \cdot y$

Demostración:

$$\begin{aligned} x + x' \cdot y &= (x + x') \cdot (x + y) \\ &= (1) \cdot (x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot (x' + y) &= x \cdot x' + x \cdot y \\ &= 0 + x \cdot y \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Leyes de *De Morgan*

- Augustus de Morgan, matemático inglés (1806-71).
- Encontró la expresión matemática para las leyes que llevan su nombre, aunque eran conocidas desde la Edad Media.

Leyes de *De Morgan*

- $(x \cdot y)' = x' + y'$ $\qquad\qquad$ $(x + y)' = x' \cdot y'$

  Demostración: Si $(x \cdot y)$ es el complemento de $(x' + y')$ entonces debe cumplirse:

  $(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$ $\quad$ y $\quad$ $(x \cdot y) + (x' + y') = 1$

  $(x \cdot y) \cdot (x' + y') = x' \cdot x \cdot y + x \cdot y \cdot y' = 0 \cdot y + x \cdot 0 = 0$

  $(x \cdot y) + (x' + y') = x' + x \cdot y + y' = x' + y + y' = 1$

Leyes de *De Morgan*

- Las leyes de De Morgan pueden extenderse a *n* variables:
  - $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n$
  - $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)' = x'_1 \cdot x'_2 \cdot \ldots \cdot x'_n$
- Ejemplo:
  - $[A' + B + (C \cdot D' \cdot E)]' = A \cdot B' \cdot (C \cdot D' \cdot E)'$
    $= A \cdot B' \cdot (C' + D + E')$

Teorema de De Morgan generalizado

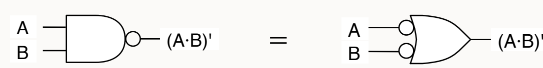
- $[F(x_1, x_2, \ldots, x_n, +, \cdot)]' = F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \cdot, +)$
- Ejemplo:

  $F(x, y, z) = x \cdot y + z \cdot (x' + y)$
  $\Rightarrow [F(x, y, z)]' = (x' + y') \cdot (z' + x \cdot y')$
- Hallar el complemento de $A' \cdot B + A \cdot D' \cdot (B + C + E')$

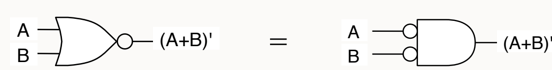
  $\{(A' \cdot B) + [A \cdot D' \cdot (B + C + E')]\}' =$
  $(A + B') \cdot (A' + D + B' \cdot C' \cdot E)$

Leyes de De Morgan

- $(A \cdot B)' = A' + B'$



- $(A + B)' = A' \cdot B'$

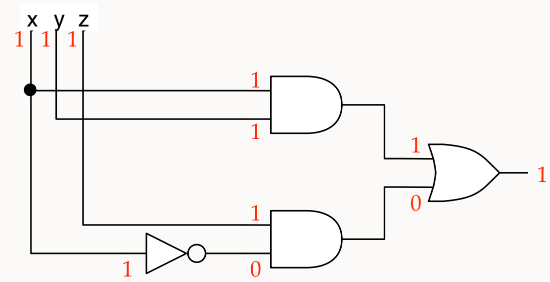


Teoremas de Expansión de Shannon

- $F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1' \cdot F(0, x_2, x_3, ..., x_n) + x_1 \cdot F(1, x_2, x_3, ..., x_n)$
- $F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = [x_1 + F(0, x_2, x_3, ..., x_n)] \cdot [x_1' + F(1, x_2, x_3, ..., x_n)]$
- Ejemplo:
  - [(A + B + C+ D)·(A·B′·C)′·(B + C′ + D)]′ =
    A′ · [(B + C+ D)·(B + C′ + D)]′ +
    A · [(B′·C)′·(B + C′ + D)]′

Análisis de circuitos combinatorios

- Podemos hallar el valor de la salida para cada una de las combinaciones de variables de entrada:



x	y	z	x·y	x′·z	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Minimización de funciones

- Definiciones:
  - Literal: una variable o su complemento. Ej.: y, x′, rs
  - Término de producto: un literal simple o el producto de varios literales. Ej.: y′, A·B, w′·x′·z
  - Término de suma: un literal simple o la suma de varios literales. Ej.: y′, A + B, w′ + x′ + z
  - Expresión de suma de productos: es la suma de varios términos de producto. Ej.: b + a′·c + b·c′·d
  - Expresión de producto de sumas: es el producto de varios términos de suma. Ej.: (a + b)·(a′ + c) ·d′

Minimización de funciones

- Una función lógica, en general, no tiene una expresión algebraica única. Varias expresiones (o circuitos) pueden producir la misma tabla de verdad y son equivalentes.
  - $x \cdot y + z \cdot (x' + y) = x' \cdot z + x \cdot y = (x + z) \cdot (x' + y)$
- Nuestro objetivo es lograr una expresión con el menor número posible de literales y términos, a fin de reducir el costo del circuito necesario. Para ello podemos usar los teoremas conocidos.

Minimización de funciones

- Simplificar $F_1(A, B, C) = A + B'\cdot C' + B'\cdot C$
  - $A + B'\cdot C' + B'\cdot C = A + B'\cdot(C' + C)$ (distributividad)
    $= A + B'$ (complementos)
- Simplificar $F_2(A, B, C) = (A + B' + C)\cdot(A + B' + C')$
  - $(A + B' + C)\cdot(A + B' + C') = (A + B') + C\cdot C'$ (distributividad)
    $= A + B'$ (complementos)

Minimización de funciones

- Simplificar $F_3(x, y) = (x+y)\cdot(x+y')\cdot(x'+y)\cdot(x'+y')$
  - $(x+y)\cdot(x+y')\cdot(x'+y)\cdot(x'+y')$
    $= (x\cdot x + x\cdot y' + x\cdot y + y\cdot y')\cdot(x'\cdot x' + x'\cdot y' + x'\cdot y + y\cdot y')$ (distributividad)
    $= (x + x\cdot y' + x\cdot y + y\cdot y')\cdot(x' + x'\cdot y' + x'\cdot y + y\cdot y')$ (idempotencia)
    $= (x + x\cdot y' + x\cdot y)\cdot(x' + x'\cdot y' + x'\cdot y)$ (complemento)
    $= x \cdot x'$ (absorción)
    $= 0$ (complemento)

Minimización de funciones

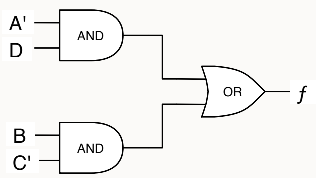
- Simplificar $F_4(A, B, C) = (A+B)\cdot(A+B\cdot C')+A'\cdot B'+A'\cdot C'+A'\cdot B\cdot C'$
  - $(A+B)\cdot(A+B\cdot C')+A'\cdot B'+A'\cdot C'+A'\cdot B\cdot C'$
    $= A+A\cdot B\cdot C'+A\cdot B+B\cdot C'+A'\cdot B'+A'\cdot C'+A'\cdot B\cdot C'$ (distributividad)
    $= A+B\cdot C'+A'\cdot B'+A'\cdot C'$ (absorción)
    $= A + B' + B\cdot C' + A'\cdot C'$ (teorema 12)
    $= A + B' + C' + A'\cdot C'$ (teorema 12)
    $= A + B' + C'$ (teorema 12)

Minimización de funciones

- Simplificar
  $F_5(A,B,C,D) = [(A+C'+D')\cdot(A'+C'+D')\cdot(B'+C+D')]'$
  - $[(A+C'+D')\cdot(A'+C'+D')\cdot(B'+C+D')]'$
    $= (A+C'+D')'+(A'+C'+D')'+(B'+C+D')'$ (de Morgan)
    $= A'\cdot C\cdot D + A\cdot C\cdot D + B\cdot C'\cdot D$ (de Morgan)
    $= C\cdot D + B\cdot C'\cdot D$ (combinación)
    $= D\cdot(C + B\cdot C')$ (distributividad)
    $= D.(C + B)$ (teorema 12)
    $= B\cdot D + C\cdot D$ (distributividad)

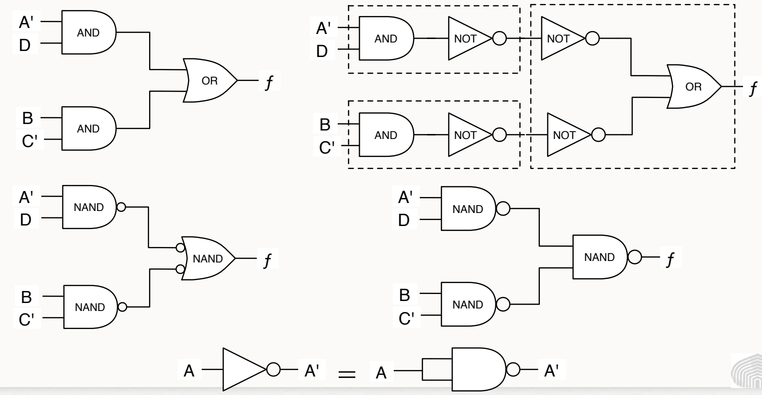
Suma de Productos

- Una suma de productos puede implementarse con compuertas AND cuyas salidas se unen en una compuerta OR. Se le llama *lógica de dos niveles*.
- f(A,B,C,D) = A'.D + B.C'



Suma de Productos

- Mediante el teorema de De Morgan puede representarse con un solo tipo de compuertas:



Producto de Sumas

- El producto de sumas puede implementarse con compuertas OR cuyas salidas se unen en una compuerta AND. Es otra forma de lógica de dos niveles.
- f(A,B,C,D) = (A+B) · (C+D′)